MATH-111(d)

Série 5 du 10.10.2024

Question 10 (bonus)

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition A est-elle inversible ?

Il faut bien réfléchir au choix de la méthode ! Ici, il est plus intéressant de résoudre après quelques opérations élémentaires du type « ajouter un multiple d'une ligne à une autre » qui ne changent pas le déterminant :

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a) \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice échelonnée (i.e., triangulaire supérieure) est le produit des coefficients diagonaux :

$$\det(A) = 1(b-a)\big(c^2-a^2-(c-a)(b+a)\big) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Pour que A soit inversible, il faut donc que $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \neq c$.

b) Existe-t-il $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A^{42} + I_3 = 0$?

Non, sinon, on aurait $A^{42} = -I_3 \Rightarrow \det(A^{42}) = \det(-I_3) \Rightarrow \det(A)^{42} = (-1)^3 \det(I_3)$, soit $\det(A)^{42} = -1$. Or, la puissance paire d'un réel est ≥ 0.

c) Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid B$ inversible et

$$\begin{cases} \det(A) = \det(B^3) \\ \det(C) = \det(B^{-1}) \\ \det(ABC) = 8 \end{cases}$$

Trouver le déterminant de chacune de ces trois matrices.

On résout en appliquant différentes règles sur le déterminant :

$$8 = \det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C) = \det(B^3)\det(B)\det(B^{-1}) = \det(B)^3\det(B)\det(B)^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(B) = \sqrt[3]{8} = 2$$

et donc $\det(C) = \frac{1}{2}$ et $\det(A) = 2^3 = 8$.